movable two-dimensional space (M_2, ∇).

Keywords: The tangent bundle, infinitesimal affine transformation, algebra of Lie, maximally movable space.

УДК 514.17

СОСТАВЛЕННЫЕ НЕ БОЛЕЕ, ЧЕМ ИЗ 16 ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ПИРАМИД ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА С ТАКИМИ КАК У ПИРАМИД ИЛИ ВДВОЕ БОЛЬШИМИ РЁБРАМИ

А.В. Тимофеенко[1], Д.Н. Судак[2], А.А. Черепухина[3]

1 *a.v.timofeenko62@mail.ru*; Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева
2 *dashe4ka-93@mail.ru*; АО Информационные спутниковые системы им. академика М. Ф. Решетнёва
3 *krutelevaalenka@mail.ru*; Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение “Зыковская Средняя Общеобразовательная школа”

Обсуждается вопрос: “Каковы все выпуклые многогранники с равносторонними паркетными гранями?” Построены указанные в названии тела и найдены группы их симметрий.

Ключевые слова: Правильногранная пирамида, паркетный многоугольник, выпуклый многогранник, группа симметрий.

В настоящей работе паркетный многоугольник, определяемый в [1] как выпуклый и составленный из равноугольных, рассматривается составленным только из правильных многоугольников. Если вершины этих многоугольников служат и вершинами выпуклого многогранника, то он является призмой, антипризмой, либо каким-нибудь из 186 тел, опубликованных в [2], см. также в этой работе ссылки на электронные атласы многогранников. Хотя с точностью до подобия существует всего 9 паркетных равносторонних многоугольников, остаётся открытым вопрос: “Каковы все выпуклые многогранники с равносторонними паркетными гранями?” В докладе планируется рассказать о продвижении к ответу и на более общий вопрос: “Каковы все типы выпуклых многогранников с паркетными гранями?” В неявном виде эта проблема появилась после завершения классификации выпуклых правильногранных тел, [3], и тел с паркетными гранями без фиктивных вершин, [2].

Известно, что ответ содержит конечное число типов, если не считать четыре бесконечные серии призм, антипризм и тел, отсекаемых от антипризм плоскостями, параллельными их основаниям. Самостоятельный интерес имеют составленные из правильногранных пирамид выпуклые тела, в алгоритм составления которых заложены группы симметрий синтезируемых многогранников. Появившиеся в трудах Г. С. М. Коксетера обозначения этих групп можно найти в публикации [4].

Теорема. *Составленный из не более 16 правильногранных пирамид выпуклый многогранник с паркетными гранями и равными или вдвое отличающимися по длине рёбрами является одним из следующих тел, справа от обозначения каждого из которых указана группа его симметрий:*

1) $M_1, [3,3]$, $M_2, [4]$, $M_3, [5]$;

2) $M_1 + M_1, [2,3], M_1 + M_2, [\,], M_2 + M_2, [3,4], M_3 + M_3, [2,5]$;

3) $^\circ S_{2,2} + M_1, [2], S_{2,2} + M_2, [3], {}^\circ S_{2,2} + M_2', [2]$;

4) $^\circ S_{3,1} + M_2, [2], {}^\circ S_{3,1} + M_2', [\,], S_{3,2} + M_1, [2^+, 6], S_{2,2} + S_{2,2}, [2^+, 2], S_{2,2} + S_{2,2}', [2]^+, {}^\circ S_{2,2} + S_{2,2}'', [2]$;

5) $^\circ S_{4,1} + M_1, [3], {}^\circ S_{4,4} + M_2, [\,]$;

6) $^\circ S_{5,1} + M_1, [3,3]', {}^\circ S_{5,2} + M_1, [\,]^+, {}^\circ S_{5,2} + M_2, [2,2], {}^\circ S_{4,4} + S_{2,2}, [\,], {}^\circ S_{3,1} + S_{3,1}, [2]$;

7) $^\circ S_{6,2} + M_2, [\,], {}^\circ S_{6,4} + M_2, [\,], {}^\circ S_{6,5} + M_2, [\,], S_{4,6} + S_{3,1}, [3]$;

8) $^\circ S_{7,1} + M_1, [2^+, 2], {}^\circ S_{7,2} + M_1, [\,], {}^\circ S_{7,3} + M_1, [\,], S_{7,4} + M_2, [\,], {}^\circ S_{6,2} + S_{2,2}, [2^+, 2], {}^\circ S_{6,5} + S_{2,2}, [2^+, 2^+]$;

9) $^\circ S_{8,4} + M_2, [\,], {}^\circ S_{6,4} + S_{3,1}, [2,2], {}^\circ S_{6,4} + S_{3,3}, [4]$;

10) $^\circ S_{9,1} + M_1, [\,]^+, {}^\circ S_{9,1} + M_2, [2,3], {}^\circ S_{9,3} + M_2, [4], {}^\circ S_{8,4} + S_{2,2}, [\,]^+, {}^\circ S_{5,1} + S_{5,1}, [2,3]^+$;

11) $^\circ S_{10,1} + M_2, [\,], {}^\circ S_{10,4} + M_2, [\,]^+, {}^\circ S_{10,5} + M_1, [3]$;

12) $^\circ S_{11,2} + M_1, [\,]^+, {}^\circ S_{11,3} + M_1, [2,3], S_{9,1} + S_{3,1}, [2^+, 2], {}^\circ S_{9,1} + S_{3,1}', [2], {}^\circ S_{9,3} + S_{3,1}, [\,]$;

13)$^\circ S_{12,3} + M_2, [\,], {}^\circ S_{12,4} + M_1, [\,], {}^\circ S_{10,4} + S_{3,1}, [\,]$;

14) $^\circ S_{13,1} + M_1, [\,], {}^\circ S_{13,1} + M_2, [2^+, 2], {}^\circ S_{13,3} + M_2, [\,]^+, {}^\circ S_{12,3} + S_{2,2}, [\,]^+, S_{7,4} + S_{7,4}, [2^+, 6], S_{7,4} + S_{7,4}', [3,4]$;

15)$^\circ S_{14,1} + M_2, [\,], S_{14,5} + M_2, [\,], S_{14,6} + M_2, [4], S_{12,4} + S_{3,3}, [3,3] {}^\circ S_{12,4} + S_{3,3}', [\,]$;

16) $^\circ S_{15,1} + M_1, [2^+, 2], {}^\circ S_{15,2} + M_2, [\,], S_{15,2} + M_2', [2]^+, {}^\circ S_{15,3} + M_2, [2], S_{15,3} + M_2', [2,4], {}^\circ S_{15,4} + M_1, [3], {}^\circ S_{15,5} + M_1, [\,], {}^\circ S_{14,4} + S_{2,2}, [2^+, 2^+], {}^\circ S_{13,1} + S_{3,1}, [\,], {}^\circ S_{12,5} + S_{4,2}, [2^+, 2]$.

Многогранник $S_{i,j}$ расположен в списке (i) на j-м месте:

$$S_{1,1} = M_1, S_{1,2} = M_2, S_{1,3} = M_3, S_{2,1} = S_{1,1} + M_1, \ldots, S_{16,10} = {}^\circ S_{12,5} + S_{4,2}.$$

Кружком помечены многогранники с фиктивными вершинами, штрих указывает на различие многогранников, составленных из двух одинаковых тел.

Полнота списка выпуклых многогранников с единичными ребрами, составленных из не более, чем 14 правильногранных пирамид, доказана в работе [4]. В этой статье найдены недоработки, исправление которых привело к появлению ещё одного 7-составного многогранника, изменению не только нумераций, но и формул некоторых других тел. Эти улучшения работы [4] содержит расположенная выше теорема. Полнота списка 15-составных тел анонсирована в работе [6].

Если анонсируемую теорему обобщить путем удаления в посылке словосочетания “не более 16”, то для построения заключения вряд ли можно обойтись без систем компьютерной алгебры. Действительно, прогнозируемый максимум числа соединяемых согласно условиям теоремы пирамид равен 512. И даже если 73 многогранника теоремы разбить на классы равнотипных тел, то получается 56 классов. Поэтому доказательство теоремы оформлено в виде, позволяющем запрограммировать следующие шаги к её обобщению. Авторы приглашают к такой работе всех заинтересованных лиц.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта №16–41–240670

Литература

1. Пряхин Ю. А. *Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ* – Л.: Наука, Ленинград.отд., 1974. –Т. 45. – С. 111–112.

2. Тимофеенко А. В. *К перечню выпуклых правильногранников* // Современные проблемы математики и механики. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова – 2011. – Т. 6. – № 3. – С. 155–170.

3. Залгаллер В. А. *Выпуклые многогранники с правильными гранями* // Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ – Л.: Наука, Ленинград.отд., 1967. –Т. 2. – С. 5–221. Режим доступа: http://www.mathnet.ru/links/fab2e074302d774a0e80229e37b1cfb8/znsl1408.pdf

4. Johnson N. W. *Convex polyhedra with regular faces* // Canad. J. Math. –1966. – Т. 18. – С. 169–200.

5. Полтанов Е. В., Судак Д. Н., Тимофеенко А. В., Якушева А. В. *О выпуклых соединениях правильногранных пирамид* // Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016. –Т. 1662. – С. 148–158. Режим доступа: http://ceur-ws.org/Vol-1662/top3.pdf

6. Окладникова Е. Тимофеенко А. *О типах выпуклых многогранников с паркетными гранями* // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно- методической конференции с международным участием. Красноярск, 16–17 ноября 2016 г. – Красноярск: Краснояр. гос.пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2016. – Т. 35. – С. 147–154.

COMPOSED OF NO MORE THAN 16 REGULAR-HEDRON PYRAMIDS CONVEX BODIES WITH SUCH AS PYRAMIDS OR TWICE AS LARGE LARGER EDGES

A.V. Timofeenko, D.N. Sudak, A.A. Cherepukhina

The issue is discussed: ”What all convex polyhedrons with equilateral parquet faces?” The bodies specified in the name are constructed. Groups of their symmetries are found.

Keywords: Convex polyhedron, group of symmetries, parquet polygon, regular-hedron pyramid.

УДК 514.17

О ПРИМЕНЕНИИ ИНВОЛЮЦИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ ГРУППУ СИММЕТРИЙ

И.А. Тимофеенко[1]

1 *ivan.timofeenko@gmail.com*; Сибирский федеральный университет

В группе $SL_6(\mathbb{Z})$ явно указаны три порождающие ее инволюции. Явно указано и описано применение систем компьютерной алгебры для синтеза многогранников.

Ключевые слова: Инволюция, группа симметрий, система компьютерной алгебры, многогранник.

Напомним, что теорема Л. Шлефли о классификации правильных многогранников в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ [1] , $n = 1,2,3,\ldots$, в середине прошлого века была усовершенствована, когда в основу определения правильного тела была положена транзитивность группы симметрий на множестве флагов этого многогранника. Все эти группы порождены отражениями. Восстановление по этим отражениям многогранника и является основным ядром усовершенствования теоремы Шлефли.